

**KRIGAGEM SIMPLES versus KRIGAGEM UNIVERSAL: QUAL O PREDITOR MAIS PRECISO?**

GÉRSON RODRIGUES DOS SANTOS<sup>1</sup>; MARCELO SILVA DE OLIVEIRA<sup>2</sup>; JOÃO MARCOS LOUZADA<sup>3</sup> & ADRIANA MARIA ROCHA TRANCOSO SANTOS<sup>4</sup>

---

**RESUMO:** A Krigagem Simples (KS) é o método de estimação da Geoestatística em que se assume a função média do processo estocástica conhecida. Já a Krigagem Universal (KU) é o método para os casos em que o processo estocástico não é estacionário, ou seja, o processo apresenta uma tendência. Assim, objetiva-se com este trabalho comparar essas duas krigagens quanto à incerteza de predição, tomando a variância de krigagem média entre as realizações e os valores preditos, obtida através da autovalidação, como critério de julgamento. Observa-se que, apesar de um fator limitante em sua utilização (o conhecimento da média), a KS apresenta-se como um preditor mais preciso que a KU (resultado obtido por simulação estocástica).

**Palavras-chave:** Hierarquização geométrica, espaços de Hilbert, simulação estocástica.

---

<sup>1</sup> Professor Doutor da UFV/Depto. de Estatística, Av. P.H.Rolfs, s/n, Campus Universitário, Viçosa-MG, CEP: 36.570-000, [gerson.santos@ufv.br](mailto:gerson.santos@ufv.br)

<sup>2</sup> Professor Doutor da UFLA/Depto. de Ciências Exatas, Campus Universitário, Cx. Postal 3037, Lavras-MG, CEP: 37.200-000, [marcelo.oliveira@dex.ufla.br](mailto:marcelo.oliveira@dex.ufla.br)

<sup>3</sup> Professor Doutor do IFES/Campus Itapina, Rod. Br 259, Zona Rural, Colatina-ES, CEP: 29.700-970, [jmarlo@bol.com.br](mailto:jmarlo@bol.com.br)

<sup>4</sup> Professora Mestre da FADMINAS/Depto. de Informática, Estação Ferroviária do Ityrapuan, s/n, Zona Rural, Lavras-MG, CEP: 37.200-000, [adrianatransoso@hotmail.com](mailto:adrianatransoso@hotmail.com)

## **SIMPLE KRIGING versus UNIVERSAL KRIGING: WHICH ONE IS THE MOST ACCURATE PREDICTOR?**

***SUMMARY:** The Simple Kriging (SK) is the geostatistical method of prediction which takes the average function of a known stochastic process. The Universal Kriging (UK) is the method for cases in which the stochastic process is not stationary, ie, the process has a trend. The objective of this work was to compare the prediction uncertainty of these two kriging methods, taking the average kriging variance between sample values and predicted values obtained by jackknife. The result was that, although there is a limiting factor in its use (the knowledge of the mean), KS is presented as a more accurate predictor than the KU (result obtained by stochastic simulation).*

***Keywords:** Geometric hierarchy, Hilbert spaces, stochastic simulation.*

## **1 INTRODUÇÃO**

Os preditores geoestatísticos (denominados Krigagem) são aqueles que usam a vizinhança amostrada com o intuito de fazer valer a percepção de que a estrutura de dependência espacial de um processo estocástico aperfeiçoa as previsões, a saber, sem viés e com variância mínima. Muitos são os estudos, e em diversas áreas do conhecimento, que têm usado os procedimentos da Krigagem. Contudo, apesar da vasta utilização desses preditores, são raros os trabalhos que apresentam comparações, quanto à precisão na previsão, entre eles.

Journal (1977) e Santos (2010) apresentam detalhes da hierarquização dos preditores geoestatísticos numa abordagem geométrica, utilizando espaços de Hilbert de variáveis aleatórias, onde é possível concluir teoricamente quanto a precisão da previsão feita por tais preditores.

Segundo Luenberger (1969), um espaço de Hilbert é um espaço vetorial dotado de um produto interno com norma e métrica associadas e completo. Como, basicamente, o que se deseja é lidar com a previsão ótima, sob os aspectos de projeções ortogonais, minimizando a “distância” entre o observado e o predito, torna-se necessário contar com esta estrutura geométrica.

Santos (2010) apresenta e demonstra 3 teoremas fundamentais para tal abordagem e estabelece um critério de julgamento entre as projeções ortogonais, denominado de variância de krigagem, que é,

essencialmente, a norma entre o vetor observado e o vetor predito. Como a utilização dos preditores impõe restrições aos subespaços vetoriais de projeção, o preditor mais preciso será aquele que apresentar maior dimensão do subespaço, pois possibilitará uma projeção ortogonal.

Assim, objetiva-se com este trabalho comparar essas duas krigagens quanto à incerteza de predição, tomando a variância de krigagem média entre as realizações e os valores preditos, obtida através da autovalidação, como critério de julgamento. Neste artigo apresenta-se a corroboração numérica (por simulação) das conclusões teóricas. Observa-se que, apesar de um fator limitante em sua utilização (o conhecimento da média), a KS apresenta-se como um preditor mais preciso que a KU (resultado obtido por simulação estocástica).

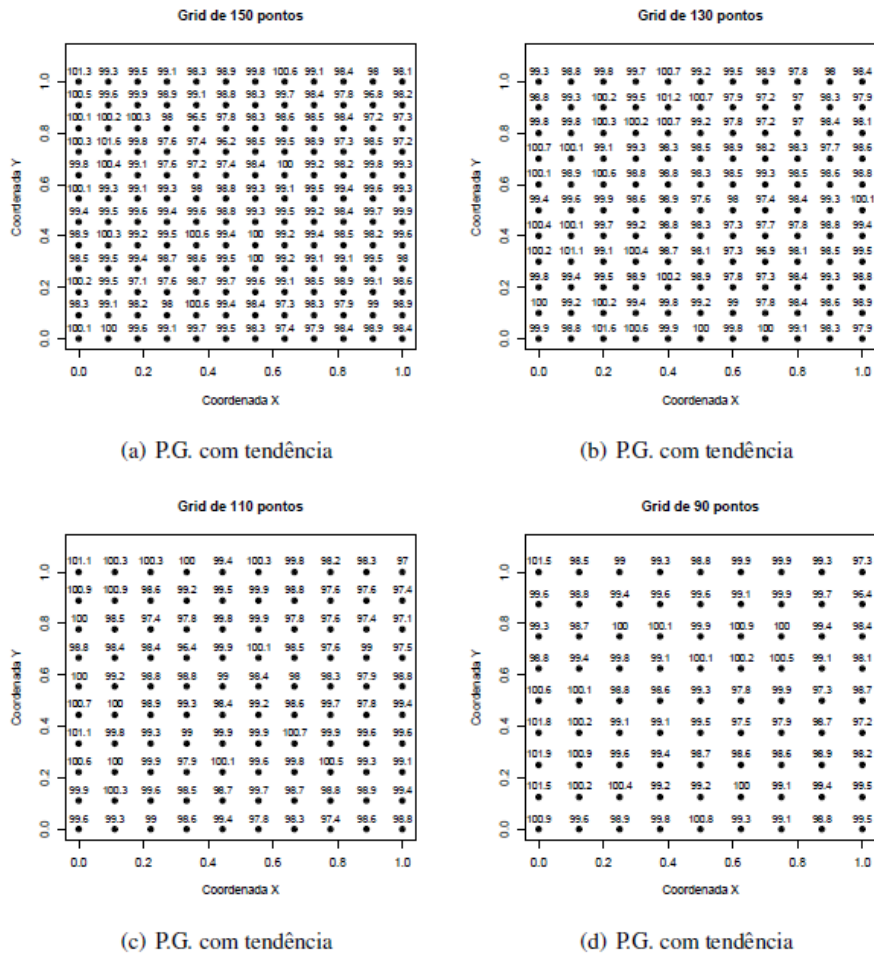
## 2 MATERIAL E MÉTODOS

Visando atingir o objetivo proposto neste trabalho foram feitas simulações, de vários tamanhos, determinando assim a dimensão do espaço vetorial e subespaços de projeção, e seguindo as restrições impostas pelos preditores, conforme apresenta Santos (2010). Os dados foram simulados em *grid's* (malhas bidimensionais) de vários tamanhos (Conforme Tabela 1), em configurações regulares (OLIVEIRA, 1991), conforme Figura 1.

As simulações geraram dados de um processo gaussiano com um vetor de médias conhecido e com tendência de 1ª. ordem em relação às coordenadas, cujo modelo é dado por  $f(x, y) = 100 - 2x + 0,3y$  e com matriz de covariância estabelecida pelo modelo esférico.

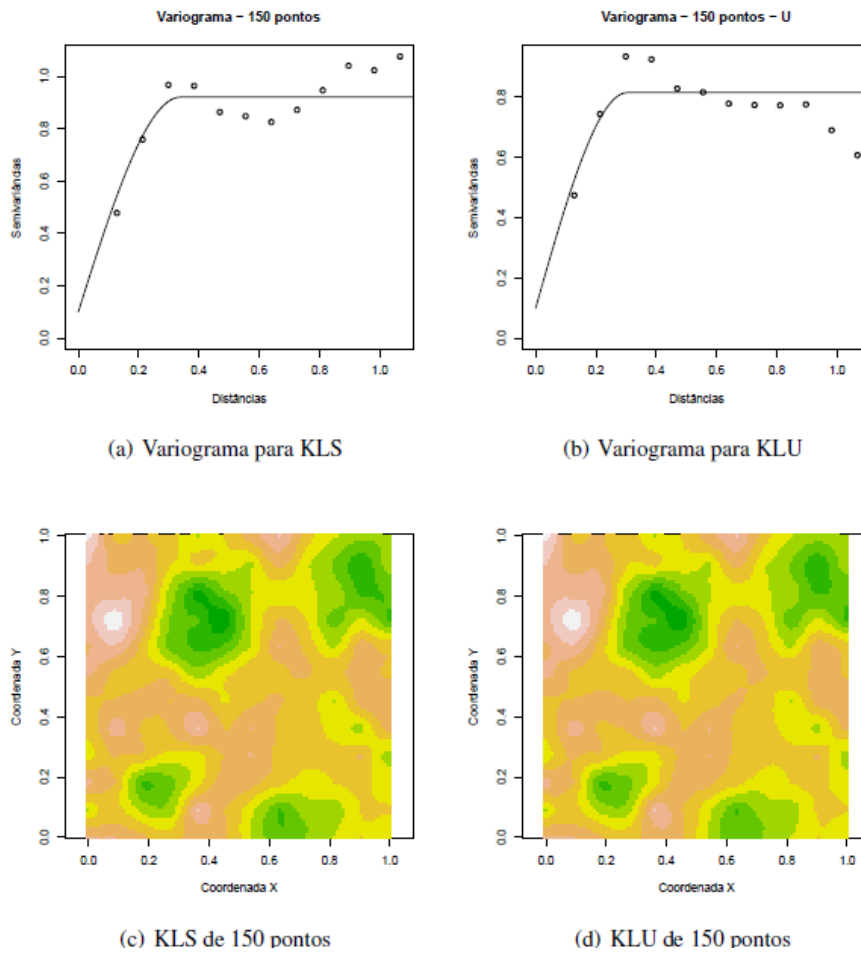
Em seguida, análises exploratórias e variográficas foram feitas, adotando o método de ajuste de variogramas, denominado simplesmente como *wls* (*weighted least squares* - mínimos quadrados ponderados pela variância), conforme recomenda Cressie (1993) e Waller & Gotway (2004). Os parâmetros foram estimados para que as krigagens fossem feitas, conforme a Figura 2.

Salienta-se, porém, que por falta de softwares estatísticos (ou até mesmo pacotes) implementados, a KU foi realizada conforme recomendada por Diggle e Ribeiro Junior (2007), ou seja, retira-se a tendência por regressão linear e analisa-se os resíduos pela Krigagem Ordinária (KO).



**Figura 1** - Grid's regulares de dados simulados, considerando um processo gaussiano (P.G.) com um vetor de médias conhecido e com tendência.

Como critério de comparação entre as krigagens, utilizou-se a variância de krigagem média, estimada pela autovalidação entre valores simulados e krigados. Todas as simulações e análises foram feitas no software R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2010) - pacote geoR (RIBEIRO JUNIOR & DIGGLE, 2001).



**Figura 2** - Semivariogramas ajustados pelo método *wls* e as krigagens simples e universal, respectivamente denotadas como KLS e KLU, para o *grid* com o maior número de pontos amostrais

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O critério de comparação entre as krigagens é a variância média de krigagem  $\hat{\sigma}_{KS}^2(x_0)$  e  $\hat{\sigma}_{KU}^2(x_0)$  (em que  $x_0$  é a representação da localização de cada valor predito) para todos os tamanhos de amostras, conforme resumo apresentado na Tabela 1.

**Tabela 1** - Resultados das simulações que ratificam a superioridade quanto à precisão preditiva da KS frente à KU, demonstrada por Santos (2010).

Tamanho do <i>grid</i>	$\hat{\sigma}_{KS}^2(x_0)$	Dimensão para KS	$\hat{\sigma}_{KU}^2(x_0)$	Dimensão para KU
144 realizações	0,1427	145	0,3369	141
121 realizações	0,1047	122	0,3229	118
100 realizações	0,1836	101	0,3965	97
81 realizações	0,0941	82	0,3610	78
64 realizações	0,2077	65	0,4496	61
49 realizações	0,2708	50	0,5944	46
25 realizações	0,3566	26	0,6137	22
16 realizações	0,4586	17	0,8022	13

Pode-se perceber que nas várias simulações efetuadas (sob condições estabelecidas pelos preditores e abordagem adotada) a variância média de krigagem para a KS foi sempre menor que a KU, corroborando com os resultados teóricos de Santos (2010) e Journel (1977), pois a projeção se dá em subespaços de dimensões diferentes (conforme terceira e quinta colunas da Tabela 1).

Pela Tabela 1, pode-se perceber ainda que a variância média de krigagem cresce ao se reduzir o tamanho amostral, o que ratifica a influência do número de informações em uma predição (ou estimação) estatística.

Santos (2010) demonstra também que a variância média de krigagem para a KU tende a aumentar quando a tendência do processo estocástico é regida por um modelo menos parcimonioso, ou seja, maior número de funções. Dessa forma, as variâncias  $\hat{\sigma}_{KU}^2(x_0)$  desse trabalho são razoavelmente pequenas, devido à parcimônia do modelo de tendência adotado nas simulações.

#### 4 CONCLUSÕES

Conclui-se que a KS é mais precisa que a KU se considerado um processo gaussiano com vetor de médias conhecido, cujo método de comparação é a estimação da variância média de krigagem numa abordagem geométrica (espaços de Hilbert), obtida através da autovalidação entre as simulações estocásticas das realizações do processo e os valores krigados.

Deve-se ressaltar que, por falta de implementação computacional adequada, a KU foi realizada conforme recomendação da literatura, ou seja, krigagem ordinária dos resíduos após a retirada da tendência por regressão linear.

## 5 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de Viçosa e ao Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Lavras.

## 6 REFERÊNCIAS

CRESSIE, N. **Statistics for spatial data**. New York: J. Wiley, 1993. 900 p.

DIGGLE, P. J.; RIBEIRO JUNIOR, P. J. **Model-based geostatistics**. New York: Springer, 2007. 228 p.

JOURNEL, A. G. Kriging in terms of projections. **Mathematical Geology**, New York, v. 9, n. 6, p. 563-586, Nov. 1977.

OLIVEIRA, M. S. **Planos amostrais para variáveis espaciais utilizando geoestatística**. 1991. 100 p. Dissertação (Mestrado em Estatística) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R**: A language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2010. Disponível em: <<http://www.r-project.org>>. Acesso em: 30 Apr. 2010.

RIBEIRO JUNIOR, P. J.; DIGGLE, P. J. geoR: a package for geostatistical analysis. **R-NEWS**, London, v. 1, n. 2, p. 15-18, June 2001.

SANTOS, G. R. **Hierarquização geométrica dos preditores geoestatísticos**. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal de Lavras, Lavras. 2010. 200 p.

WALLER, L. A.; GOTWAY, C. A. **Applied spatial statistics for public health data**. New Jersey: Wiley-Interscience, 2004. 494 p.