

DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA DIMENSÃO FRACTAL DO MOVIMENTO DA ÁGUA NO SOLO EM FLUXOS HORIZONTAIS

Edivânia dos Santos

*Departamento de Engenharia Rural - FCA - UNESP
Caixa Postal 237 – CEP 18603-970 – Botucatu – SP*

Ivan Amaral Guerrini

Departamento de Física e Biofísica - IB – UNESP - Botucatu

1 RESUMO

Em busca de novas tecnologias para produção agrícola, muitos esforços tem sido feitos no intuito de se conhecer importantes fenômenos da natureza como os que envolvem água, solo e planta.

O movimento da água no solo como um processo de difusão pode ser visualizado também como um fenômeno fractal, associando o expoente n da equação $x = \lambda \cdot t^n$ ao expoente de Hurst e caracterizando o fenômeno como Movimento Browniano fracionário.

Este trabalho estudou a relação da posição em relação ao tempo para todo o espectro de umidade do solo durante o fenômeno de infiltração da água no solo, em colunas horizontais, em laboratório, com pressão de entrada da água ao nível zero, utilizando a equação acima.

Para a medição da umidade utilizou-se a técnica da atenuação da radiação gama, sendo que os ajustes dos dados de umidade em função do tempo foram feitos pelo modelo Weibull.

UNITERMOS : Fractal, água no solo, infiltração.

SANTOS dos, E., GUERRINI, I. A. Experimental determination of the fractal dimension of the soil-water content in the horizontal flux.

2 ABSTRACT

Searching for new technologies for agricultural production many efforts has been made to know important phenomena in nature involve water, soil and plant.

The movement soil-water how as a diffusion process can be visualized, as a fractal phenomenon, associating the exponent n of equation $x = \lambda \cdot t^n$ to the Hurst exponent and characterizing the phenomenon as a Brownian Fractional Motion.

This paper studied the relation between the position and the time, for the full range water contents during soil-water infiltration, in horizontal columns, in the laboratory with water pressure entrance, utilizing the above equation. To measure soil water content the radiation gamma attenuation, was utilized the water content transients were fitted by the Weibull model.

KEY-WORDS: Fractal, soil-water and infiltration.

3 INTRODUÇÃO

Em busca de novas tecnologias para produção agrícola, muitos esforços tem sido feitos no intuito de se conhecer importantes fenômenos da natureza como os que envolve água, solo e planta. A irrigação é um fator de produção extremamente relevante e o conhecimento de assuntos correlatos como o movimento da água no solo, passa a ter um papel fundamental na pesquisa agropecuária.

Em muitos estudos recentes, a nova Teoria do Caos e Fractais está sendo experimentada como uma nova ferramenta para compreensão de fenômenos naturais como salienta Mandelbrot (1993) e Feder (1988), dentre outros. Dentre estes fenômenos naturais, o movimento Browniano, um processo de difusão, tem sido descrito na literatura como um fenômeno fractal (Feder, 1988). O movimento da água no solo como um processo de difusão, pode ser visualizado também como um fenômeno fractal, associando o expoente n da equação $x = \lambda \cdot t^n$ ao expoente de Hurst e caracterizando o fenômeno como Movimento Browniano fracionário. (Guerrini & Swartzendruber, 1992,1994)

Este trabalho, usando os novos formalismos de Guerrini & Swartzendruber (1992,1994) e baseado também no trabalho de Nielsen et. al. (1962), estudou a relação da posição em relação ao tempo para todo o espectro de umidade do solo durante o fenômeno de infiltração da água no solo, em colunas horizontais, em laboratório, com pressão de entrada da água ao nível zero, utilizando a equação $x = \lambda \cdot t^n$ introduzida por Guerrini (1982) e em detalhes por Guerrini & Swartzendruber (1992).

A possível variação do expoente n (da equação acima) com a umidade do solo deve trazer informações importantes explicando o caráter fractal do movimento da água no solo.

4 MATERIAIS E MÉTODOS

O solo utilizado foi do tipo terra roxa estruturada coletado em uma área da Faculdade de Ciências Agronômicas do Campus da Unesp, Botucatu.

Para o processo de infiltração da água, utilizou-se colunas de acrílico de 50 cm de comprimento e 4 cm de diâmetro interno. As mesmas foram preenchidas com o solo seco ao ar, passado em peneira de 2 mm, compactado com um “compactador” de madeira, buscando obter na coluna uma densidade do solo próxima daquela observada em campo.

Para a acompanhamento do processo de infiltração da água no solo ao longo do tempo, utilizou-se o método de atenuação da radiação gama tendo como fonte o Amerício (^{241}Am).

Pela mesma técnica, testou-se a homogeneidade, ponto a ponto, da coluna de solo sob o aspecto de densidade, admitindo-se uma variação pontual máxima de 20%, o que corresponde a um $\text{CV} \approx 5\%$.

Através da equação 01 abaixo, pode-se calcular a umidade em função do tempo. As leituras foram feitas a cada 2 cm da coluna, constituindo assim os transientes de umidade em cada ponto, com três repetições do experimento como um todo.

O presente trabalho, para fins de simplificação, apresentamos apenas um transiente de umidade de uma dada coluna.

$$\theta = \frac{1}{x\mu_w\rho_w} \times \ln \frac{(I_s - BG)}{(I_u - BG)} \quad (01)$$

onde: θ = umidade volumétrica (cm^3 água/ cm^3 de solo)

x = espessura da coluna (cm)

μ_w = coeficiente de atenuação de massa de água (cm^2/g)

ρ_w = massa específica da água (g/cm^3)

I_s = número de impulsos contados após a passagem da radiação pelo solo seco
(contagens por unidade de tempo).

I_u = número de impulsos contados após a passagem da radiação pelo solo úmido
(contagens por unidade de tempo).

BG= radiação de fundo

De posse dos valores de umidade em função do tempo, e utilizando um programa de computador (Microsoft Origin 3.5, Inc. 1995) ajustou-se os dados através de uma regressão não-linear, dada pela equação de Weibull (equação nº 2) a qual relaciona a umidade normalizada (ω) em função do tempo da seguinte maneira:

$$\omega(t) = 1 - \exp -b[(t - t_0)^c] \quad (02)$$

onde: $\omega(t)$ = umidade normalizada em função do tempo

b = parâmetro de escala

c = parâmetro de forma

t = tempo em minutos

t_0 = instante imediatamente anterior à chegada da frente de molhamento ao ponto considerado.

A umidade normalizada, variando de zero a um, é dada por:

$$\omega = (\theta - \theta_i) / (\theta_s - \theta_i) \quad (03)$$

onde: ω = umidade normalizada, adimensional, em função do tempo ($0 < \omega < 1$)

θ_i = umidade do solo seco ao ar (inicial ou residual)

θ_s = umidade do solo na saturação

θ = umidade do solo calculada através da técnica da radiação gama (equação nº 2).

Após o ajuste feito pela equação de Weibull e obtido os parâmetros b , c e t_0 , através da equação 04, que é a equação 2 solucionada para t , é possível conhecer o instante t em que ocorre uma dada umidade (ω_2 e t_2 da Tabela 1).

$$t = [\ln (1 / (1 - (\omega_2)))^{1/b}]^{1/c} + t_0 \quad (04)$$

Através das curvas dadas pela relação do deslocamento (x) em função do tempo (t) para cada umidade (ω variando de 0,0 a 0,9 - Tabela 2), em uma regressão não-linear, foi feito um estudo da equação de potência descrita abaixo (equação 5), e obteve-se o parâmetro n em função da umidade, que é objetivo deste estudo, e que permitirá se conhecer a dimensão fractal do movimento da água no solo. Os valores de n são apresentados na Tabela 3 (com as três repetições), provenientes da seguinte relação:

$$x = \lambda t^n \quad (05)$$

onde: x = transiente de umidade, em cm.

λ = variação da variável de Boltzman, em

t = tempo, em min.

n = parâmetro de ajuste, adimensional

Para o cálculo da dimensão fractal, conforme considerações feitas por FEDER (1988) e segundo a equação abaixo, a Dimensão Fractal do movimento da água no solo é dada por:

$$D = 2 - n \quad (06)$$

onde: D = dimensão fractal do movimento da água no solo

n = expoente da equação (parâmetro do ajuste)

sendo que o valor de n é a média das três repetições e é o expoente do tempo que se assemelha ao expoente H de Hurst (Tabela 3).

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para o presente trabalho, as tabelas e figuras aqui apresentadas, representam apenas um exemplo, dentro de um conjunto de dados correspondentes a este experimento.

O modelo proposto para ajuste dos transientes de umidade pela equação de Weibull apresentou bons resultados, sendo que o teste de χ^2 apresentou valores de 0.00169, conforme Figura 1.

De posse dos parâmetros P_1 , P_2 e P_3 que correspondem respectivamente à b , t_0 e c da equação 02, construiu-se um gráfico de $\omega_2(t)$ sendo instante t conhecido através da equação 04.

Na região da saturação, ou seja, para valores de ω acima de 0.7, os dados não se ajustam muito bem segundo a equação de Weibull, o que concorda com os resultados obtidos por Guerrini & Swartzendruber (1994).

Uma outra etapa do cálculo da dimensão fractal do movimento da água no solo, foi a construção do gráfico de posição(x) em função do tempo(t) para cada umidade, ajustando-se os dados pela equação de potência (equação 05) para a obtenção do expoente n .

O valor do expoente n obtido em valores médios variou de 0.3 a 0.6, sendo que o valores maiores que 0.5 podem significar algum erro sistemático. Os demais valores condizem com os resultados encontrados na literatura.

Em função do valor de n próximo a 0.5 temos que a dimensão fractal do movimento da água no solo na região da saturação, será próximo de 1.5 (equação 06).

Tabela 1 - Valores de umidade normalizada (ω) obtidas pela técnica da radiação gama (equação nº 1) - Pressão de entrada da água: nível

I	t (min)	θ	$\theta 1$	ω	t_1 (min)	$\omega 1$	$\omega 2$	t_2 (min)
5295	73	0	0,01874	0	93	0,66018	0	79
5505	75	0	0,01874	0	95	0,66799	0,1	79
5475	77	0	0,01874	0	97	0,68366	0,2	79
5125	79	0,05475	0,07349	0,14277	142	0,69941	0,3	79,0001
4405	93	0,25315	0,27189	0,66018	228	0,72318	0,4	79,00243
4395	95	0,25615	0,27489	0,66799	230	0,78745	0,5	79,03743
4375	97	0,26216	0,2809	0,68366	232	0,71524	0,6	79,45676
4235	140	0,30507	0,32381	0,79558	371	0,86964	0,7	84,27972
4355	142	0,2682	0,28694	0,69941	373	0,80372	0,8	150,20871
4175	144	0,32393	0,34267	0,84476	1481	0,93695	0,9	1843,9627
4325	228	0,27731	0,29605	0,72318	1483	0,90312		
4245	230	0,30196	0,3207	0,78745	1891	0,93695		
4335	232	0,27427	0,29301	0,71524				
4365	369	0,26517	0,28391	0,69153				
4145	371	0,33347	0,35221	0,86964				
4225	373	0,3082	0,32694	0,80372				
4025	1479	0,37239	0,39113	0,97114				
4065	1481	0,35928	0,37802	0,93695				
4105	1483	0,34631	0,36505	0,90312				
4065	1891	0,35928	0,37802	0,93695				
4235	1893	0,30507	0,32381	0,79558				
4155	1895	0,33029	0,34903	0,86133				

Tabela 2 - Expoente do tempo e dimensão fractal obtidos pelo ajuste da equação nº 5 com suas repetições.

$\omega 2$	n1	n2	n3	n médio	D
0,0	0,595	0,48152	0,39573	0,49075	1,50925
0,1	0,595	0,48152	0,39573	0,49075	1,50925
0,2	0,595	0,48152	0,39573	0,49075	1,50925
0,3	0,595	0,48153	0,39573	0,49075	1,50925
0,4	0,59504	0,48155	0,39575	0,49078	1,50922
0,5	0,60385	0,4817	0,39596	0,49384	1,50616
0,6	0,60524	0,48334	0,39869	0,49576	1,50424
0,7	0,61524	0,52027	0,42807	0,52119	1,47881
0,8	0,38547	0,44351	0,34349	0,39082	

A área hachurada da tabela abaixo representa os pares de valores de posição (x) e tempo (t) para umidade normalizada $\omega = 0.8$, que diferem em número de pares, das demais umidades.

Tabela 3- Posição da frente de molhamento(cm) em função do tempo(min).

X	t($\omega=0.0$)	t($\omega=0.1$)	t($\omega=0.2$)	t($\omega=0.3$)	t($\omega=0.4$)	t($\omega=0.5$)	t($\omega=0.6$)	t($\omega=0.7$)	t($\omega=0.8$)	X1
5	3	3	3	3	3,00015	3,00821	3,31807	14,38458	37,0076	9
7	8	8	8	8	8,00021	8,00995	8,33296	18,33097	79,05948	11
9	15	15	15,00006	15,00123	15,09247	15,56672	18,33959	145,25543	145,25543	15
11	27,00924	27,00924	27,00943	27,00943	27,01302	27,05689	27,49306	31,68141	150,20871	17
15	61,97696	61,97696	61,97696	61,97703	61,97891	62,01014	62,42076	67,58919	282,43299	21
17	79	79	79	79,0001	79,00243	79,03743	79,45676	84,27972	325,27334	25
19	104	104	104	104	104,00014	104,00804	104,31644	115,50945	671,43684	27
21	146,73745	146,73745	146,73745	146,73747	146,73843	146,76023	147,14318	153,52702	938,9384	29
23	161	161	161	161,00001	161,00056	161,01688	161,37775	168,90196	995,48031	31
25	190	190	190	190,00002	190,00098	190,02284	190,40597	196,78132		
27	263,41748	263,41748	263,41748	263,41748	263,41769	263,42724	263,74892	273,84879		
29	303,42061	303,42061	303,42061	303,42061	303,42072	303,42755	303,72614	315,82016		
31	370	370	370	370	370,00011	370,00702	370,30643	382,32279		
33	446	446	446	446	446	446,00037	446,1518	500,76035		
35	449,36726	449,36726	449,36726	449,36726	449,36726	449,36814	449,55391	484,67611		

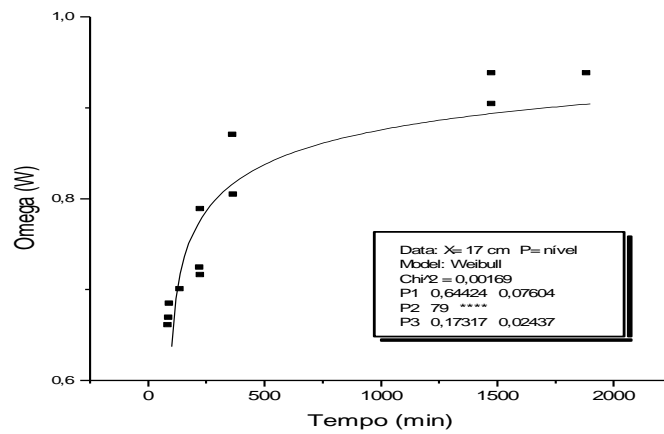


Figura 1 - Umidade do solo normalizada (ω) em função do tempo (t) ajustados pelo modelo de Weibull (equação nº 1).

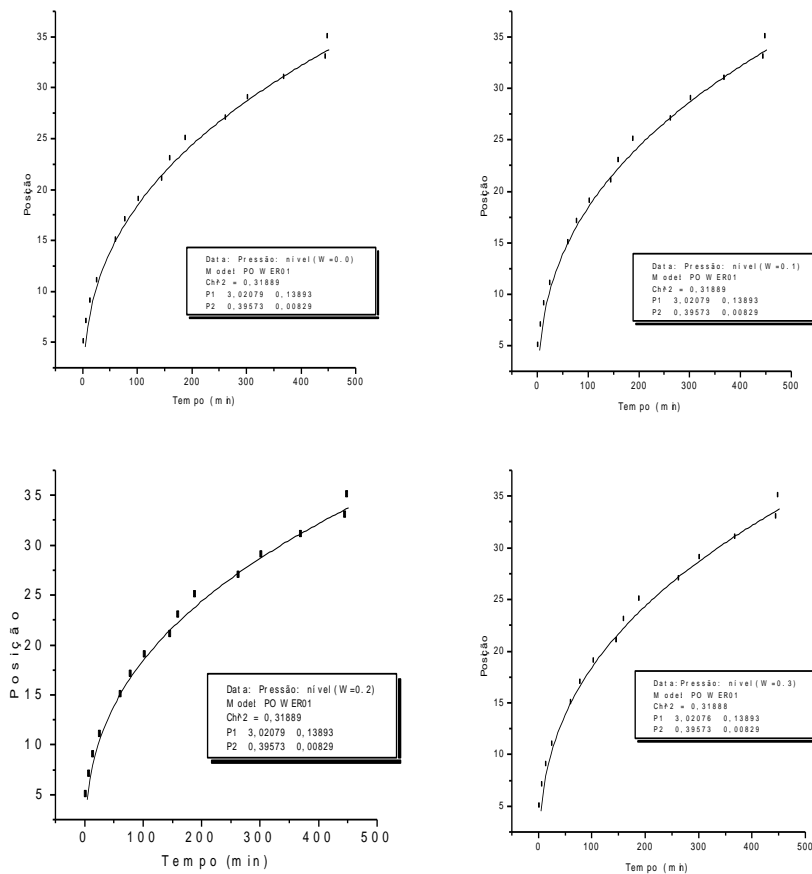


Figura 2 - Posição da frente de molhamento (cm) em função do tempo (min) para obtenção da dimensão fractal ajustadas pela curva de potência (equação nº5)

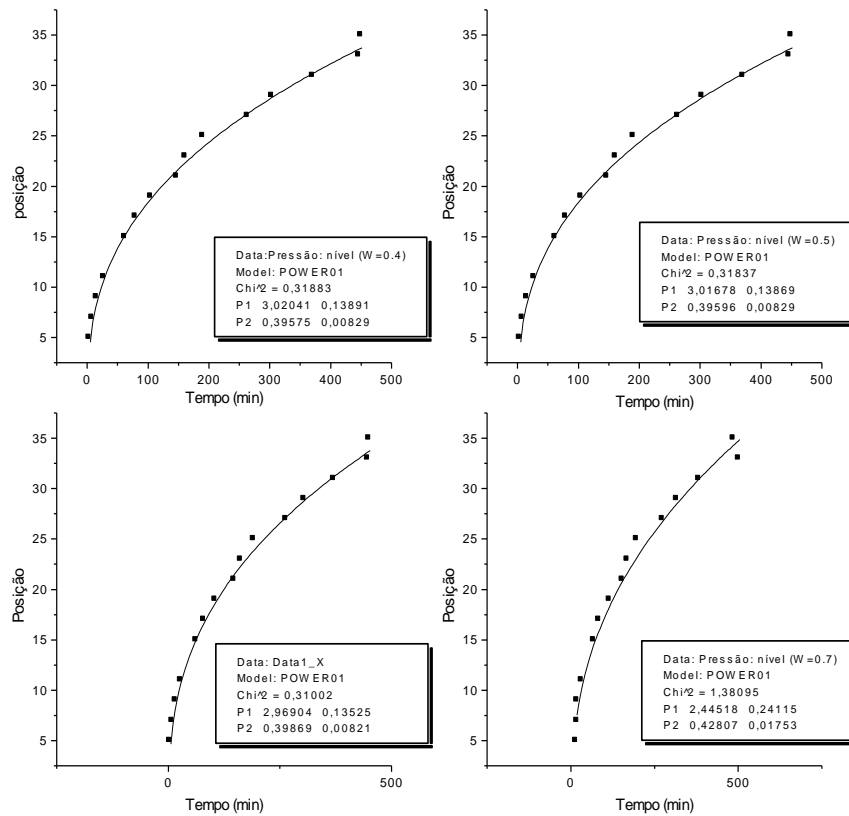


Figura 3 - Posição da frente de molhamento (cm) em função do tempo (min) para obtenção da dimensão fractal ajustadas pela curva de potência (equação n⁵)

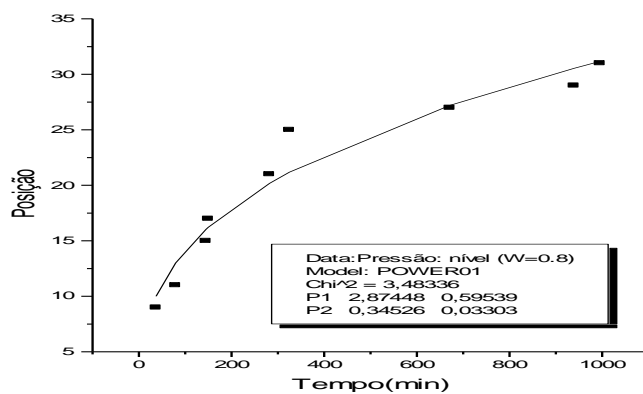


Figura 4 - Posição da frente de molhamento (cm) em função do tempo (min) para obtenção da dimensão fractal ajustadas pela curva de potência (equação n⁵)

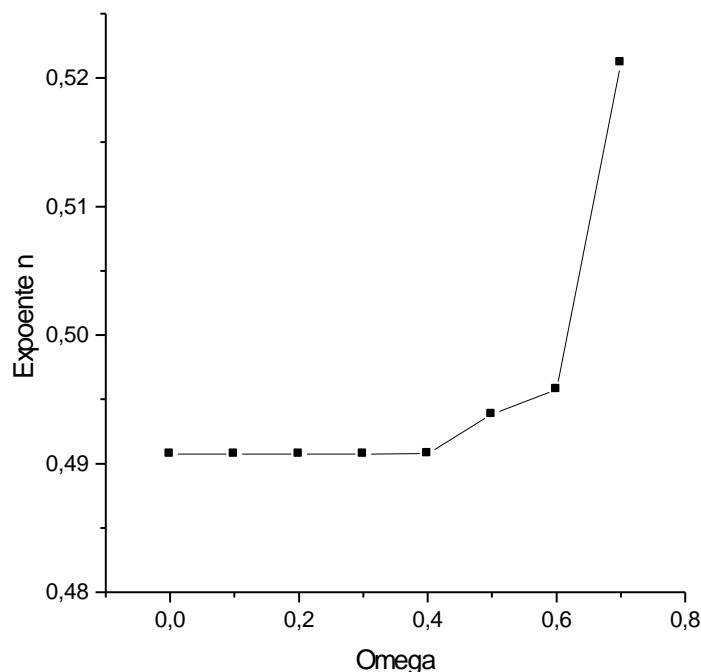


Figura 5 - Variação do expoente do tempo (n) em função da unidade normalizada (ω)

6 CONCLUSÃO

O expoente n da $x = \lambda t^n$ é aqui também identificado com o expoente de Hurst (Feder, 1988; Voss, 1988) o que leva a concluir que, reafirmando as investigações feitas por Guerrini & Swartzendruber (1992,1994), que o movimento da água no solo, um processo de difusão, assemelha-se ao movimento Browniano fracionário e que a Teoria do Caos e Fractais pode ser uma nova ferramenta para análise deste processo físico. Outras propriedades do solo como porosidade, tamanho e distribuição de agregados, e também tamanho e distribuição de poros podem ser estudados pela Teoria dos Fractais como visto em Perfect et al. (1995); Posadas et al. (1993); Filgueira et al. (1996) dentre outros.

Mostrou-se aqui a possibilidade de se usar a dimensão fractal como mais um parâmetro caracterizador do movimento da água no solo, indicando condições de saturação ou não, e permitindo uma abordagem mais flexível e realista do fenômeno.

Apoio financeiro : CNPq - Conselho Nacional de Pesquisa e FAPESP (Processo nº94/3869-5)

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- FEDER, J. *Fractals*. New York., Plenum Press, 1988. p.283.
- FILGUEIRA, R.R. et al. La teoria fractal aplicada a la caracterizacion de las propiedades físicas del suelo. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA AGRÍCOLA, 24, 1995, Viçosa. *Resumos...* Viçosa: 1995.
- GUERRINI, IVAN A. *Emprego da Equação de Weibull na obtenção da difusividade da água no solo na infiltração horizontal*. Piracicaba, 1982. p.95 (Doutorado - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/ USP)
- GUERRINI, IVAN A.; SWARTZENDRUBER, D. Soil water difusivity as explicit dependent on both time and water content. *Soil Sci. Soc. of Am. J.*, v.56, p. 335-40, 1992.
- GUERRINI, IVAN A.; SWARTZENDRUBER, D. Fractals characteristics of the horizontal movement of water in soils. *Fractals*, v.2, p. 465-8, 1994.
- MANDELBROT, B.B. *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman and company, San Francisco, 1993.

- NIELSEN, D.R.; BIGGAR, J.M., DAVIDSON, J.M. experimental consideration of diffusion analysis in insaturated flow problem. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 26(2): 107-12, 1962.
- PERFECT, E.; KAY, B.D. Applications of fractals in soil and tillage research: a review. *Soil & Tillage Research*, v. 36, p.1-20, 1995.
- POSADAS, A.D.; CRESTANA, S. Aplicação da teoria fractal na caracterização do fenômeno “fingering” em solos não saturados. *Rev. Bras. Ciênc. Solo*, v.17, n.1, p.1-8, 1993.
- VOSS, R.F. *Fractal in Nature*. In: *The Science of Fractals Image*, Edited by H. O. Peitgen and D. Saupe, Springer-Verlag, New York. 1988.